TD M3 – Approche d'énergétique de la dynamique

D.Malka – MPSI 2015-2016 – Lycée Saint-Exupéry

M1 – Saut à la perche

D'un point de vue énergétique, expliquer le principe du saut à la perche. Sachant qu'un athlète peut acquérir la vitesse de $10\,m.s^{-1}$, à quelle hauteur peut-il espérer sauter (en ordre de grandeur). Commenter sachant que le record du monde est de $6,16\,m$ (Renaud Lavillenie, 15 février 2014).

M2 – Déformation d'un ressort

Une masse m glisse sans frottement sur un plan incliné d'un angle α avec l'horizontale (fig.1). Elle est lâchée du point A situé à une distance d du point O, sans vitesse initiale et finit par percuter un ressort (de raideur k et de longueur à vide l_0) fixé en O. Le ressort possède initialement sa longueur à vide.

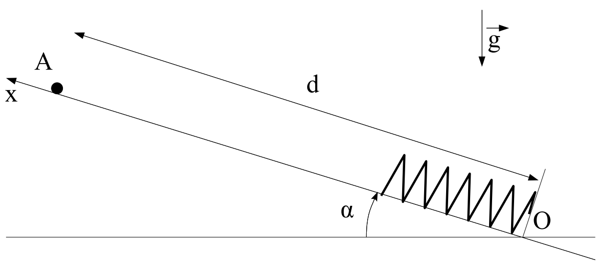

Figure 1 – Que sera le mouvement de la masse ?

1. Tracer l'énergie potentielle $E_p(x)$ en fonction de x.
2. A quelle condition la masse atteint-elle le point O ? Interpréter en terme de barrière de potentiel.
3. Quel est le mouvement de la masse s'il n'y a pas collision en O ?
4. Que se passe-t-il, qualitativement, si on prend en compte les frottements ?
5. Sur les questions précédentes, voyez-vous une hypothèse cachée contestable ?

M3 – Puits double

On considère un point matériel M ne pouvant se déplacer que suivant un axe Ox et plongé dans le champ d'énergie potentielle suivant :

$$E_p(x) = ax^4 + bx^2 + c$$

où x est l'abscisse réduite de M (donc sans dimension).

1. Tracer le graphe de l'énergie potentielle pour $a = 1$, $b = -100$ et $c = 1000$.
2. Existe-t-il des positions d'équilibre ? Si oui, discuter leurs stabilités.
3. Le point M se trouve initialement en $x = -7,07$. Quelle vitesse initiale faut-il communiquer à M pour qu'il puisse explorer le puits droit ? Les frottements sont supposés très faibles.
4. A la lumière du graphe tracé question 1, interpréter les portraits de phase fig.2, fig.3, fig.4 et fig.5.

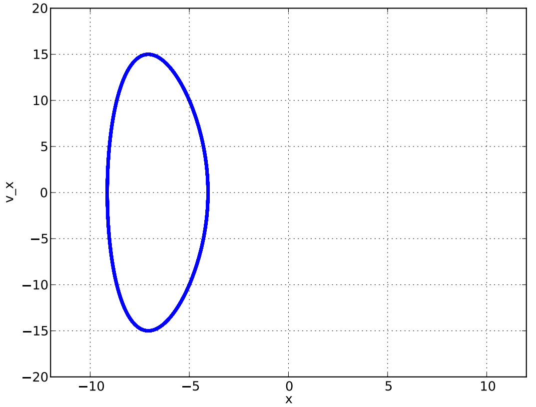

Figure 2 – Trajectoire de phase 1

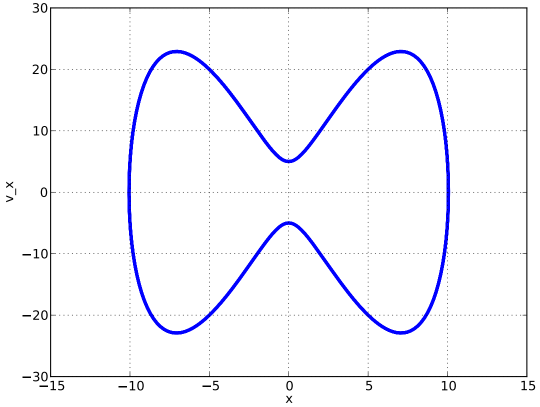

Figure 3 – Trajectoire de phase 2

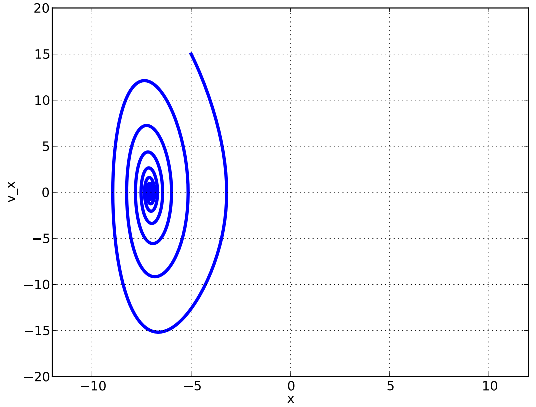

Figure 4 – Trajectoire de phase 3

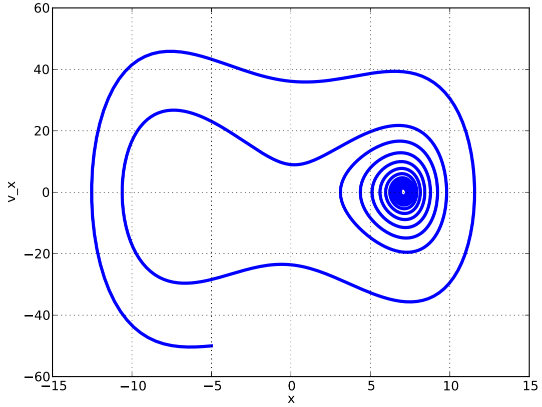

Figure 5 – Trajectoiret de phase 4

M4 – Vibrations de la molécule de monoxyde de carbone

Une molécule de monoxyde de carbone CO est modélisée par deux masses ponctuelles m_1 pour l'atome de carbone et m_2 pour l'atome d'oxygène. Pour simplifier, on considérera que l'atome de carbone est fixe dans un référentiel galiléen, et que l'atome d'oxygène ne peut subir que des déplacements rectilignes le long d'un axe (Ox). L'attraction gravitationnelle est négligeable à cette échelle.

L'énergie potentielle d'interaction des deux atomes est bien représentée par l'équation empirique :

$$V(r) = V_0 \left(1 - e^{-\beta(r-r_0)}\right)^2$$

où r est la distance des noyaux des deux atomes et où V_0, β et r_0 . On donne le graphe de $V(r)$ fig.6.

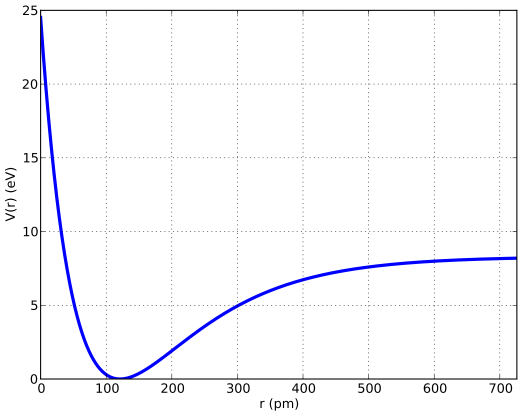

Figure 6 – Potentielle d'interaction entre les atomes de carbone et d'oxygène dans la molécule de monoxyde de carbone

1. Quelle est la dimension de β ?
2. Que représente physiquement les constantes V_0, r_0 et β ? Faire apparaître V_0 et r_0 sur le graphe et donner leurs valeurs.
3. Analyser qualitativement le mouvement de l'atome d'oxygène si son énergie mécanique est inférieure à V_0.
4. En effectuant un développement limité à l'ordre 2 de l'énergie potentielle d'interaction au voisinage de r_0, montrer qu'il existe un domaine de distance où l'interaction entre les deux atomes peut-être modélisée par la force de rappel d'un ressort de raideur k dont on donnera l'expression.
5. En déduire la fréquence des petites oscillations de la molécule de monoxyde de carbone autour de sa position d'équilibre.
6. Que se passe-t-il si on communique à la molécule une énergie telle que $E_m > V_0$?

M5 – Anneau coulissant avec ressort

Soit un référentiel galiléen $\mathcal{R}_g$ de repère (Ox, Oy, Oz) de vecteurs unitaires $\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z$. Une perle quasi-ponctuelle P, de masse M, est astreinte à se déplacer sans frottements le long d'un demi-cercle (C), de rayon a. Le point P est attaché à un ressort (R) dont l'autre extrémité est fixée en O' $(OO' = a)$. Le ressort (R) possède une constante de raideur k et une longueur au repos l_0. Le point P est repéré par l'angle $(Ox, OP) = \theta$ qui reste compris entre $-\pi$ et π.

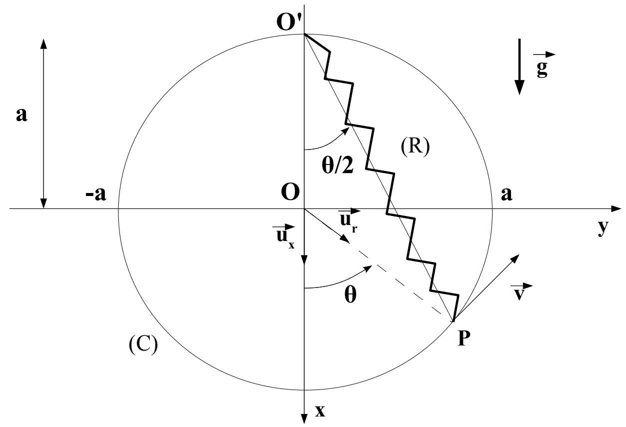

Figure 7 – On complique un peu le problème !

1. Analyser qualitativement le comportement suivant les paramètres du système. On s'intéressera en particulier aux positions d'équilibre et à leurs stabilités.

2. Energie potentielle du système.

   2.1 Montrer que $\overrightarrow{O'P}$ s'exprime dans la base polaire $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$:

   $$\overrightarrow{O'P} = a(1+\cos\theta)\vec{u}_r - a\sin\theta\vec{u}_\theta$$

   En déduire que son module s'écrit : $O'P = 2a\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$.

   2.2 Déterminer alors l'expression de l'énergie potentielle E_p (à une constante près) du système.

3. Positions d'équilibre.

   3.1 Analyser le graphe dynamique de l'énergie potentielle à l'adresse :
   `http://www.geogebratube.org/student/m85244`

   3.2 On suppose les relations suivantes entre les paramètres :
   $a = \frac{2mg}{k}$ et $l_0 = \sqrt{3}\left(a - \frac{mg}{k}\right)$
   Quelles sont les positions d'équilibre θ_1 et θ_2 ?

   3.3 Etudier la stabilité des équilibres obtenus.